Die Bellsche Ungleichung

QUANTENPHYSIK · EXPERIMENTE

Der nordirische Physiker John Bell hatte einen Kollegen namens Reinhold Bertlmann, der stets zwei verschiedenfarbige Socken trug. Sah man an einem Fuß eine rosa Socke, wusste man sofort, dass die andere nicht rosa war. Daran ist nichts Geheimnisvolles. Die Farben standen schon morgens beim Anziehen fest, man erfährt sie nur nacheinander. Bell benutzte dieses Beispiel 1981 in einem berühmten Vortrag, um zu zeigen, warum die Quantenmechanik genau so nicht funktioniert [1].

Die Bellsche Ungleichung ist das Werkzeug, mit dem man diesen Unterschied im Experiment prüfen kann. Sie hat aus einer philosophischen Streitfrage zwischen Einstein und Bohr eine messbare Zahl gemacht, und die Messungen haben eine Antwort geliefert, die 2022 mit dem Nobelpreis ausgezeichnet wurde.

Die Frage, die Einstein stellte

1935 veröffentlichten Albert Einstein, Boris Podolsky und Nathan Rosen ein Gedankenexperiment [2]. Zwei Teilchen entstehen gemeinsam und fliegen auseinander. Nach der Quantenmechanik sind sie verschränkt: Misst man an einem eine Eigenschaft, kennt man sofort das Ergebnis am anderen, egal wie weit es entfernt ist. Einstein schloss daraus, dass die Teilchen ihre Eigenschaften schon vorher in sich getragen haben müssen, wie Bertlmanns Socken. Die Quantenmechanik, die nur Wahrscheinlichkeiten angibt, wäre dann unvollständig. Es müsste verborgene Variablen geben, eine Art versteckter Anleitung, die das Ergebnis festlegt.

Diese Sicht nennt man lokalen Realismus. Realismus heißt, dass Messergebnisse schon vor der Messung feststehen. Lokal heißt, dass nichts, was man hier tut, augenblicklich etwas dort beeinflussen kann. Beides klingt selbstverständlich. Bohr hielt dagegen, aber fast dreißig Jahre lang wusste niemand, wie man entscheiden sollte, wer recht hat. Mehr über den Streit steht im Porträt Albert Einstein und die Quanten.

Bells Idee

1964 fand John Bell, der eigentlich am CERN als Teilchenphysiker arbeitete und sich die Quantengrundlagen als Hobby vornahm, den entscheidenden Schritt [3]. Er zeigte: Wenn man nicht nur eine Eigenschaft misst, sondern an beiden Teilchen jeweils zwischen verschiedenen Messrichtungen wählen kann, dann sagen lokal-realistische Theorien und die Quantenmechanik für die Zusammenhänge der Ergebnisse unterschiedliche Zahlen voraus. Egal, wie raffiniert die verborgene Anleitung ist, die Zusammenhänge können eine

bestimmte Grenze nicht überschreiten. Die Quantenmechanik sagt dagegen voraus, dass sie es bei geschickt gewählten Richtungen tun.

Die heute meistgenutzte Form der Ungleichung stammt von John Clauser, Michael Horne, Abner Shimony und Richard Holt aus dem Jahr 1969 und heißt nach ihren Anfangsbuchstaben CHSH-Ungleichung [4]. Alice misst ihr Teilchen in einer von zwei Richtungen, a oder a′, Bob seines in b oder b′. Die Größe *E* gibt jeweils an, wie stark die Ergebnisse übereinstimmen, zwischen −1 und +1. Dann gilt für jede lokal-realistische Theorie:

$$S = \; | \, E(a,b) - E(a,b') + E(a',b) + E(a',b') \, | \quad \leq \quad 2 \qquad (1)$$

Die Quantenmechanik erlaubt dagegen Werte bis 2√2, also etwa 2,83. Dass sie nicht noch höher gehen kann, hat der russische Mathematiker Boris Zirelson 1980 bewiesen [5]. Man muss also nur messen, ob *S* größer als 2 ist.

Fünfzig Jahre Messungen

Das erste Experiment machten 1972 Stuart Freedman und John Clauser in Berkeley mit Photonenpaaren aus angeregten Kalziumatomen [6]. Das Ergebnis verletzte die Ungleichung, wie die Quantenmechanik es vorhersagt. Doch es blieben Schlupflöcher, also Möglichkeiten, wie eine raffinierte lokal-realistische Theorie das Ergebnis doch noch hätte erklären können. Was, wenn die Messgeräte sich irgendwie absprechen? Was, wenn nur ein Teil der Photonen nachgewiesen wird und dieser Teil nicht repräsentativ ist?

Alain Aspect in Orsay schloss 1982 das erste wichtige Schlupfloch. Er wechselte die Messrichtung erst, als die Photonen schon unterwegs waren, sodass keine Information über die Einstellung rechtzeitig zum anderen Teilchen gelangen konnte [7]. Anton Zeilinger in Innsbruck und Wien trieb die Experimente in den Neunzigerjahren weiter und machte die Verschränkung zum Werkzeug für Quantenkommunikation und Teleportation [8].

2015 gelang schließlich der Test ohne die großen Schlupflöcher. Ein Team um Ronald Hanson in Delft verschränkte zwei Elektronenspins in Diamanten, die 1,3 Kilometer voneinander entfernt auf dem Universitätsgelände standen. In 245 Durchgängen fanden sie *S* = 2,42 ± 0,20 [9]. Wenige Wochen später bestätigten Gruppen in Wien und in Boulder das Ergebnis mit Photonen und deutlich höherer statistischer Sicherheit [10],[11] (Abb. 1).

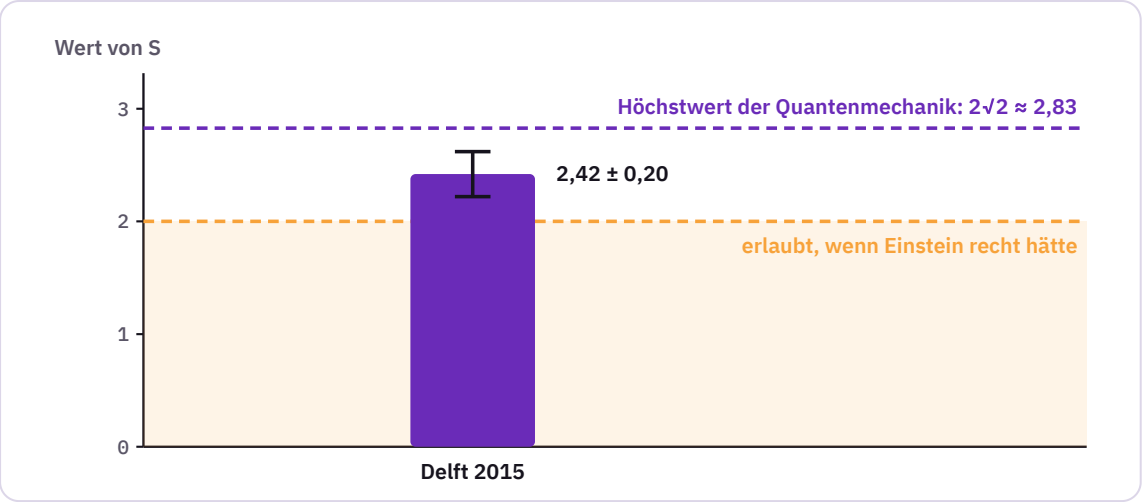


Abb. 1: Der Messwert von Delft liegt über der Grenze von 2, die jede lokal-realistische Theorie einhalten müsste. Eigene Darstellung nach [9],[4],[5].

2022 erhielten Aspect, Clauser und Zeilinger dafür den Nobelpreis für Physik, „für Experimente mit verschränkten Photonen, den Nachweis der Verletzung Bellscher Ungleichungen und Pionierarbeit in der Quanteninformationswissenschaft“ [8]. Bell selbst hat das nicht mehr erlebt, er starb 1990.

Was das Ergebnis bedeutet

Die Natur verletzt die Bellsche Ungleichung. Daraus folgt, dass mindestens eine der beiden Annahmen falsch sein muss, die Einstein so selbstverständlich erschienen: Entweder stehen Messergebnisse nicht schon vorher fest, oder es gibt Zusammenhänge, die über Raum hinweg ohne Zeitverzögerung bestehen. Welche Annahme man aufgibt, darüber streiten die Deutungen der Quantenmechanik bis heute. Klar ist nur, dass Bertlmanns Socken das falsche Bild sind.

Eines folgt allerdings nicht daraus, und das wird oft missverstanden: Man kann mit Verschränkung keine Nachrichten schneller als das Licht schicken. Alice sieht bei ihren Messungen nur zufällige Ergebnisse. Die besonderen Zusammenhänge zeigen sich erst, wenn sie ihre Daten mit Bob vergleicht, und dafür braucht sie einen gewöhnlichen Kanal. Einsteins Relativitätstheorie bleibt also unangetastet.

Und praktisch ist das alles längst geworden. Eine Verletzung der Bellschen Ungleichung beweist, dass zwei Parteien wirklich verschränkte Teilchen teilen, und das ist die Grundlage für abhörsichere Schlüssel in der Quantenkryptographie und für das künftige Quanteninternet. Aus einer Frage, die Einstein für philosophisch hielt, ist Technik geworden.

Zum Weiterlesen

Einsteins Spuk. Teleportation und weitere Mysterien der Quantenphysik

Anton Zeilinger · Pantheon, 2024 · ISBN 978-3-570-55502-6

Einer der Nobelpreisträger erzählt, wie aus Bells Ungleichung Experimente wurden und aus den Experimenten Technik. Ohne Formeln, mit viel Laborgeschichte.

Bei Amazon ansehen*

Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics

John S. Bell · Cambridge University Press, 2004 (englisch) · ISBN 978-0-521-52338-7

Bells gesammelte Aufsätze, darunter der Vortrag über Bertlmanns Socken. Klar geschrieben und erstaunlich gut lesbar.

Bei Amazon ansehen*

* Werbelink: Kaufen Sie über diesen Link, erhalten wir von Amazon eine kleine Provision, am Preis ändert sich für Sie nichts. Mehr Empfehlungen auf unserer Seite Bücher zur Quantenphysik.

Quellen

1. J. S. Bell: *Bertlmann's socks and the nature of reality.* In: Journal de Physique Colloques 42 (1981), C2-41–C2-62, doi:10.1051/jphyscol:1981202.
2. A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen: *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?* In: Physical Review 47 (1935), S. 777–780, doi:10.1103/PhysRev.47.777.
3. J. S. Bell: *On the Einstein Podolsky Rosen paradox.* In: Physics Physique Fizika 1 (1964), S. 195–200, doi:10.1103/PhysicsPhysiqueFizika.1.195.
4. J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony, R. A. Holt: *Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories.* In: Physical Review Letters 23 (1969), S. 880–884, doi:10.1103/PhysRevLett.23.880.
5. B. S. Cirel'son: *Quantum generalizations of Bell's inequality.* In: Letters in Mathematical Physics 4 (1980), S. 93–100, doi:10.1007/BF00417500.

6. S. J. Freedman, J. F. Clauser: *Experimental Test of Local Hidden-Variable Theories.* In: Physical Review Letters 28 (1972), S. 938–941, doi:10.1103/PhysRevLett.28.938.
7. A. Aspect, J. Dalibard, G. Roger: *Experimental Test of Bell's Inequalities Using Time-Varying Analyzers.* In: Physical Review Letters 49 (1982), S. 1804–1807, doi:10.1103/PhysRevLett.49.1804.
8. Königlich Schwedische Akademie der Wissenschaften: *Press release: The Nobel Prize in Physics 2022.* 4. Oktober 2022. nobelprize.org.
9. B. Hensen u. a.: *Loophole-free Bell inequality violation using electron spins separated by 1.3 kilometres.* In: Nature 526 (2015), S. 682–686, doi:10.1038/nature15759.
10. M. Giustina u. a.: *Significant-Loophole-Free Test of Bell's Theorem with Entangled Photons.* In: Physical Review Letters 115 (2015), 250401, doi:10.1103/PhysRevLett.115.250401.
11. L. K. Shalm u. a.: *Strong Loophole-Free Test of Local Realism.* In: Physical Review Letters 115 (2015), 250402, doi:10.1103/PhysRevLett.115.250402.

Zitiervorschlag

quanten.de: *Die Bellsche Ungleichung.* Stand: Oktober 2026. URL: https://quanten.de/bellsche_ungleichung.html (PDF: https://quanten.de/pdf/bellsche_ungleichung.pdf)

Texte und Abbildungen © 2026 quanten.de. Nutzung mit Quellenangabe und Link gern, kommerzielle Nutzung nach Absprache: info@quanten.de

Weiterlesen: Quantenverschränkung · Albert Einstein und die Quanten · Quantenkryptographie · Das Quanteninternet