Die Schrödinger-Gleichung

QUANTENPHYSIK · THEORIE EINFACH ERKLÄRT

Wenn Physiker von „der“ Gleichung der Quantenmechanik sprechen, meinen sie diese hier. Sie steht in jedem Lehrbuch, auf T-Shirts und Kaffeetassen, und sie hat den Ruf, unverständlich zu sein. Das stimmt nur halb. Was sie mathematisch tut, kann man ohne Studium verstehen, wenn man sich ein paar Minuten Zeit nimmt. Was sie *bedeutet*, darüber streiten Physiker dagegen seit hundert Jahren.

Wir erklären beides und rechnen am Ende ein Beispiel durch, das man in jedem modernen Fernseher wiederfindet.

Weihnachten in Arosa

Ende 1925 war Erwin Schrödinger 38 Jahre alt, Professor für theoretische Physik an der Universität Zürich und als Physiker angesehen, aber noch kein großer Name. Über die Feiertage fuhr er nach Arosa in Graubünden, wo er in der Villa Frisia wohnte. Skigefahren ist er dort offenbar kaum. Stattdessen, so berichtete er, habe er sich mit „ein paar Rechnungen“ zu einer neuen Atomtheorie beschäftigt [1]. Am 27. Dezember schrieb er von dort an seinen Kollegen Wilhelm Wien [2], und in den Wochen danach entstand die Gleichung, die seinen Namen trägt.

Die Idee dazu hatte er aus Paris. Louis de Broglie hatte 1924 vorgeschlagen, dass nicht nur Licht, sondern auch Elektronen Welleneigenschaften haben. Wenn das stimmte, so Schrödingers Gedanke, dann brauchte man eine Gleichung, die beschreibt, wie sich diese Welle ausbreitet. Anfang 1926 erschien seine erste Mitteilung „Quantisierung als Eigenwertproblem“ in den Annalen der Physik. Darin zeigte er, dass seine Gleichung die Energiestufen des Wasserstoffatoms ganz von selbst liefert, ohne die künstlichen Zusatzregeln, die Niels Bohr noch gebraucht hatte [3]. Einige Monate zuvor hatte Werner Heisenberg mit seiner Matrizenmechanik dasselbe Ziel auf völlig anderem Weg erreicht. Schrödinger konnte bald zeigen, dass beide Theorien mathematisch gleichwertig sind, und für seine Arbeit erhielt er 1933 den Nobelpreis.

Was in der Gleichung steht

Für ein Teilchen, das sich nur entlang einer Linie bewegen kann, sieht die Schrödinger-Gleichung so aus:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V\psi \qquad (1)$$

Die Hauptfigur ist ψ, der griechische Buchstabe Psi, die sogenannte Wellenfunktion. Sie ordnet jedem Ort *x* und jedem Zeitpunkt *t* eine Zahl zu. Die Gleichung sagt, wie sich diese Funktion mit der Zeit verändert, und das ist auch schon ihr ganzer Zweck. Wer den Zustand eines Quantensystems jetzt kennt, kann mit ihr ausrechnen, wie er in einer Sekunde aussieht.

Lesen kann man sie wie eine Energiebilanz. Links steht, wie schnell sich ψ mit der Zeit ändert. Rechts stehen zwei Beiträge, die zusammen die Energie des Teilchens ausmachen. Der erste, mit der zweiten Ableitung nach dem Ort, misst, wie stark die Welle gekrümmt ist. Eine stark gekrümmte, kurzwellige Welle gehört zu einem Teilchen mit viel Bewegungsenergie. Der zweite Term, *V*·ψ, enthält die potenzielle Energie, also etwa die Anziehung durch einen Atomkern. Dazu kommen ein paar Konstanten: die Masse *m*, das reduzierte plancksche Wirkungsquantum ħ und die imaginäre Einheit *i*.

Gerade dieses *i* ist wichtig. Es macht ψ zu einer komplexen Zahl und sorgt dafür, dass die Gleichung Wellen beschreibt, die sich ausbreiten und überlagern, statt einfach zu zerfließen wie ein Tropfen Tinte im Wasser. Und weil die Gleichung linear ist, gilt: Sind zwei Wellenfunktionen Lösungen, dann ist auch ihre Summe eine. Aus dieser unscheinbaren mathematischen Eigenschaft folgen die Überlagerungszustände, um die es bei Schrödingers Katze geht.

Aber was ist ψ eigentlich?

Hier wird es spannend, denn Schrödinger selbst lag falsch. Er hoffte, ψ beschreibe eine echte, im Raum verteilte Ladungswolke, das Elektron wäre also gewissermaßen verschmiert. Das ließ sich nicht halten, denn ein Elektron wird bei einer Messung immer als Ganzes an einem Ort gefunden, nie zu einem Drittel hier und zu zwei Dritteln dort.

Die Deutung, die sich durchsetzte, stammt von Max Born. Er schlug noch 1926 vor, dass das Quadrat des Betrags von ψ die Wahrscheinlichkeit angibt, das Teilchen an einem bestimmten Ort zu finden [4]. Die Gleichung selbst ist also vollkommen deterministisch. Sie sagt exakt voraus, wie sich ψ entwickelt. Was ψ aber über die Messung verrät, sind nur Wahrscheinlichkeiten. Schrödinger hat diese Deutung nie wirklich gemocht, und die Frage, was beim Messen physikalisch passiert, ist bis heute Gegenstand von Forschung und Streit. Unser Beitrag zur Unschärferelation zeigt, wie eng das mit der Wellennatur zusammenhängt.

Ein Elektron im Kasten

Das einfachste Beispiel, an dem man sieht, was die Gleichung leistet, steht in jedem Physiklehrbuch. Ein Teilchen ist zwischen zwei Wänden eingesperrt, die es nicht durchdringen kann. Dazwischen bewegt es sich frei. Die Wellenfunktion muss an beiden Wänden null sein, ganz ähnlich wie eine Gitarrensaite, die an beiden Enden eingespannt ist. Eine solche Saite kann nicht in beliebigen Tönen schwingen, sondern nur in ihrem Grundton und dessen Obertönen (Abb. 1).

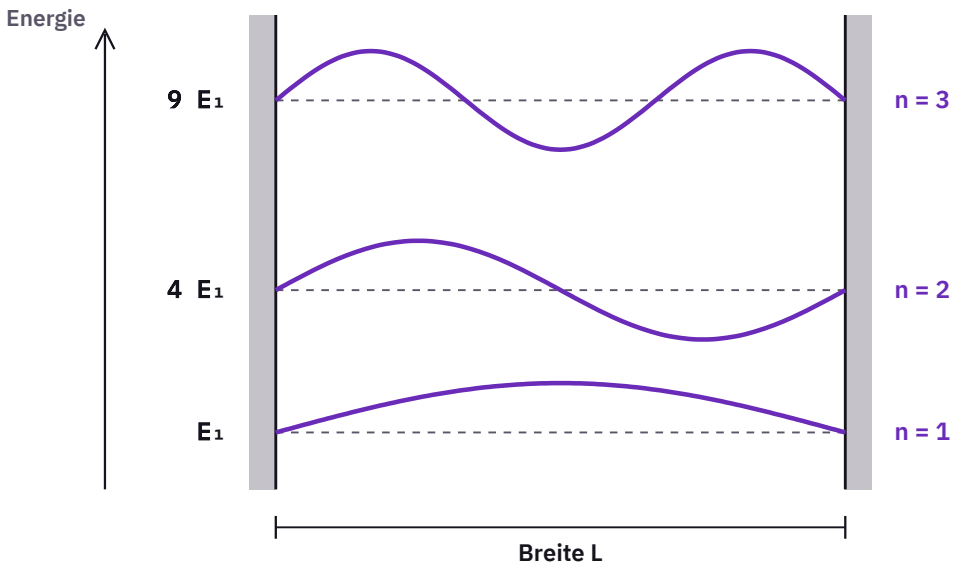


Abb. 1: Die drei niedrigsten erlaubten Wellenfunktionen eines Teilchens im Kasten. Jede passt mit einer ganzen Zahl halber Wellenlängen hinein. Eigene Darstellung.

Löst man die Schrödinger-Gleichung für diesen Fall, kommen nur bestimmte Energien heraus:

$$E_n = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}, \qquad n = 1, 2, 3, \ \ldots \tag{2}$$

Hier steckt die ganze Quantisierung in einer Zeile. Die Energie kann nicht beliebig klein sein, sie beginnt bei einem Mindestwert für $n = 1$, und die höheren Stufen liegen beim Vierfachen, Neunfachen und so weiter. Ein ruhendes Teilchen im Kasten gibt es nicht.

Rechnen wir das für ein Elektron in einem Kasten von einem Nanometer Breite durch, das sind ungefähr fünf Atomdurchmesser. Mit der Elektronenmasse von $9{,}11 \cdot 10^{-31}$ Kilogramm ergibt Gleichung (2) für den Grundzustand rund $6{,}0 \cdot 10^{-20}$ Joule, also etwa 0,38 Elektronenvolt. Der Abstand zur nächsten Stufe ist dreimal so groß. Das ist genau die Größenordnung, in der Elektronen in Atomen und Molekülen springen, wenn sie Licht

aussenden oder schlucken. Und Gleichung (2) zeigt noch etwas: Je kleiner der Kasten, desto größer die Abstände, denn L steht im Nenner im Quadrat.

Vom Lehrbuch in den Fernseher

Diese Abhängigkeit von der Größe nutzt man heute ganz praktisch. Quantenpunkte sind Halbleiter-Kristalle, die nur wenige Nanometer groß sind, so klein, dass die Elektronen darin eingesperrt sind wie in unserem Kasten. Ihre Farbe hängt deshalb nicht nur vom Material ab, sondern von ihrer Größe. Kleinere Kristalle leuchten blauer, größere röter. 2023 erhielten Moungi Bawendi, Louis Brus und Alexei Ekimov dafür den Nobelpreis für Chemie, und die Königlich Schwedische Akademie der Wissenschaften hob hervor, dass diese winzigen Teilchen ihr Licht inzwischen aus Fernsehbildschirmen und LED-Lampen verbreiten und Chirurgen helfen, Tumorgewebe sichtbar zu machen [5].

Wer also einen Fernseher mit dem Kürzel QLED besitzt, schaut jeden Abend auf eine Anwendung einer Gleichung, die vor hundert Jahren in einem Schweizer Kurort entstand. Für die Physik ist sie dabei nur der Anfang. Sie gilt für langsame Teilchen; für Elektronen nahe der Lichtgeschwindigkeit hat Paul Dirac 1928 eine Erweiterung gefunden, die nebenbei den Spin erklärt und die Antimaterie vorhersagt.

Zum Weiterlesen

Quantenmechanik: Grundlagen (Grundkurs Theoretische Physik 5/1)

Wolfgang Nolting · Springer Spektrum · ISBN 978-3-642-25402-4

Der Klassiker für das Studium. Herleitung, Lösungsmethoden und viele Übungsaufgaben zur Schrödinger-Gleichung, vom Kasten bis zum Wasserstoffatom.

Bei Amazon ansehen*

Quanten. Einstein, Bohr und die große Debatte über das Wesen der Wirklichkeit

Manjit Kumar · Berlin Verlag · ISBN 978-3-8270-1019-3

Erzählt ohne Formeln, wie Schrödinger, Heisenberg, Bohr und Einstein um die Deutung der Wellenfunktion gerungen haben. Spannend wie ein Roman.

Bei Amazon ansehen*

* Werbelink: Kaufen Sie über diesen Link, erhalten wir von Amazon eine kleine Provision, am Preis ändert sich für Sie nichts. Mehr Empfehlungen auf unserer Seite Bücher zur Quantenphysik.

Quellen

1. T. Gull: *A very pretty theory.* UZH News, Universität Zürich. news.uzh.ch.
2. S. K. Suslov: *Schrödinger's Wave Mechanics: Remarkable Dates and Place One Hundred Years Ago.* Preprint, 2026. arXiv:2601.05337.
3. E. Schrödinger: *Quantisierung als Eigenwertproblem (Erste Mitteilung).* In: Annalen der Physik 384 (1926), S. 361–376, doi:10.1002/andp.19263840404.
4. M. Born: *Zur Quantenmechanik der Stoßvorgänge.* In: Zeitschrift für Physik 37 (1926), S. 863–867, doi:10.1007/BF01397477.
5. NBC News: *3 scientists win Nobel Prize in chemistry for their work on tiny quantum dots.* 4. Oktober 2023. nbcnews.com.

Zitiervorschlag

```
quanten.de: Die Schrödinger-Gleichung. Stand: Oktober 2026. URL:
https://quanten.de/schroedinger_gleichung.html (PDF:
https://quanten.de/pdf/schroedinger_gleichung.pdf)
```


Texte und Abbildungen © 2026 quanten.de. Nutzung mit Quellenangabe und Link gern, kommerzielle Nutzung nach Absprache: info@quanten.de

Weiterlesen: Schrödingers Katze · Die Unschärferelation · Werner Heisenberg · 100 Jahre Quantenmechanik

Online-Fassung mit aktualisierten Quellen: https://quanten.de/schroedinger_gleichung.html