Die Heisenbergsche Unschärferelation

GRUNDLAGEN · WERNER HEISENBERG, 1927

Wer auf der Autobahn geblitzt wird, bekommt zwei Angaben zugeschickt, nämlich wo das Auto war und wie schnell es fuhr. Niemand käme auf die Idee, dass die eine Angabe die andere verdirbt. Beide sind so genau, wie das Radargerät eben misst, und ein besseres Gerät würde beide noch genauer machen. Dass ein Gegenstand in jedem Augenblick einen bestimmten Ort und eine bestimmte Geschwindigkeit hat, die man im Prinzip zugleich beliebig genau kennen kann, ist eine so selbstverständliche Annahme, dass man sie kaum je ausspricht.

Für Elektronen, Atome und Moleküle stimmt sie nicht, und zwar grundsätzlich nicht, nicht bloß aus Mangel an guten Messgeräten. Werner Heisenberg hat diese Grenze 1927 beschrieben [1], und kaum eine andere Aussage der Physik ist so bekannt und wird zugleich so oft missverstanden. Um zu sehen, woher sie kommt, muss man sich zuerst von der Vorstellung lösen, ein Teilchen sei einfach ein sehr kleines Kügelchen.

Ein Teilchen, das sich wie eine Welle verhält

Jedes Teilchen hat auch Wellencharakter. Seine De-Broglie-Wellenlänge $\lambda = h/p$ hängt vom Impuls p ab, also von Masse mal Geschwindigkeit. Wüsste man den Impuls exakt, hätte die Welle genau eine einzige Wellenlänge, und eine solche Welle hat weder Anfang noch Ende, sie erstreckt sich unendlich weit. Wo wäre das Teilchen dann? Nirgends im Besonderen.

Will man es an einer Stelle konzentrieren, muss man viele Wellen mit verschiedenen Wellenlängen überlagern, die sich dort gegenseitig verstärken und anderswo auslöschen, ein sogenanntes **Wellenpaket**. Je enger dieses Paket sein soll, desto mehr verschiedene Wellenlängen braucht man, und weil jede Wellenlänge zu einem anderen Impuls gehört, wird der Impuls umso unbestimmter, je genauer der Ort festliegt (Abb. 1). Das ist im Kern schon die ganze Unschärferelation, nur noch ohne Zahlen.

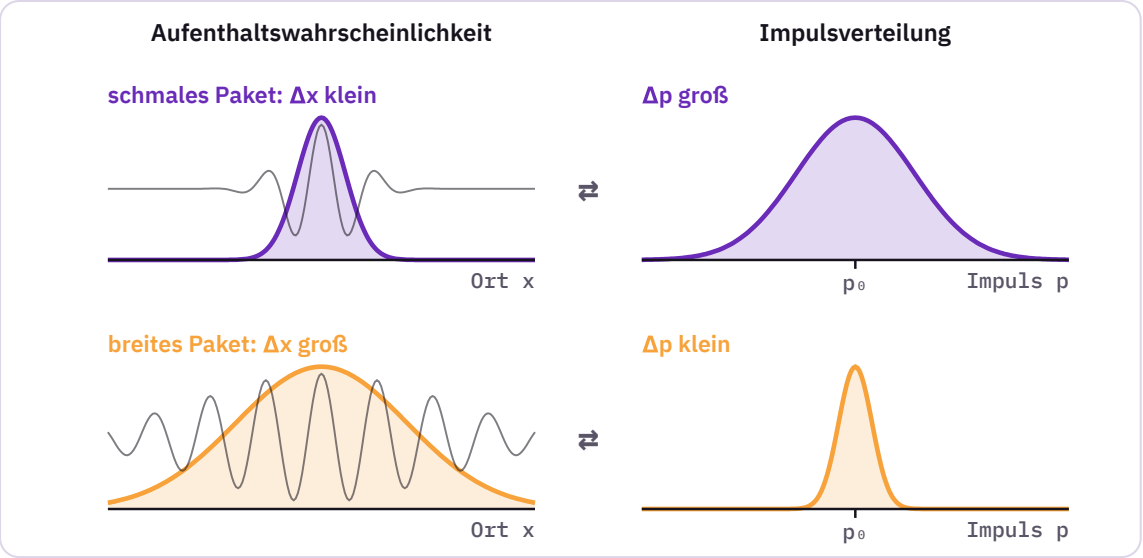

Abb. 1: Gaußsche Wellenpakete nach Gleichung (3). Farbig die Wahrscheinlichkeitsverteilungen, grau der Realteil der Wellenfunktion. Die Pakete bewegen sich mit dem mittleren Impuls p_0. Ein schmales Paket im Ort (oben) hat eine breite Impulsverteilung, ein breites Paket (unten) eine schmale. Eigene Berechnung und Darstellung.

Durch einen Spalt geschickt

Ob das mehr ist als ein Rechenbild, lässt sich mit einem überraschend einfachen Versuch prüfen. Man schickt Teilchen durch einen Spalt der Breite a. In dem Moment, in dem eines hindurchfliegt, ist sein Ort quer zur Flugrichtung auf etwa a festgelegt. Hinter dem Spalt fliegen die Teilchen aber nicht einfach geradeaus weiter, sie fächern sich auf, und auf einem Schirm entsteht ein Beugungsbild. Aus dem Winkel θ, unter dem das erste Minimum liegt, kann man abschätzen, wie unscharf der Impuls quer zur Flugrichtung geworden ist:

$$\sin\theta = \frac{\lambda}{a} \Rightarrow \Delta p \approx p \cdot \frac{\lambda}{a} = \frac{h}{a}, \qquad \Delta x \approx a \Rightarrow \Delta x \cdot \Delta p \approx h \tag{1}$$

Wer den Spalt schmaler macht, um den Ort genauer festzulegen, bekommt dafür ein breiteres Beugungsbild (Abb. 2), und das Produkt der beiden Unschärfen bleibt in der Größenordnung von h.

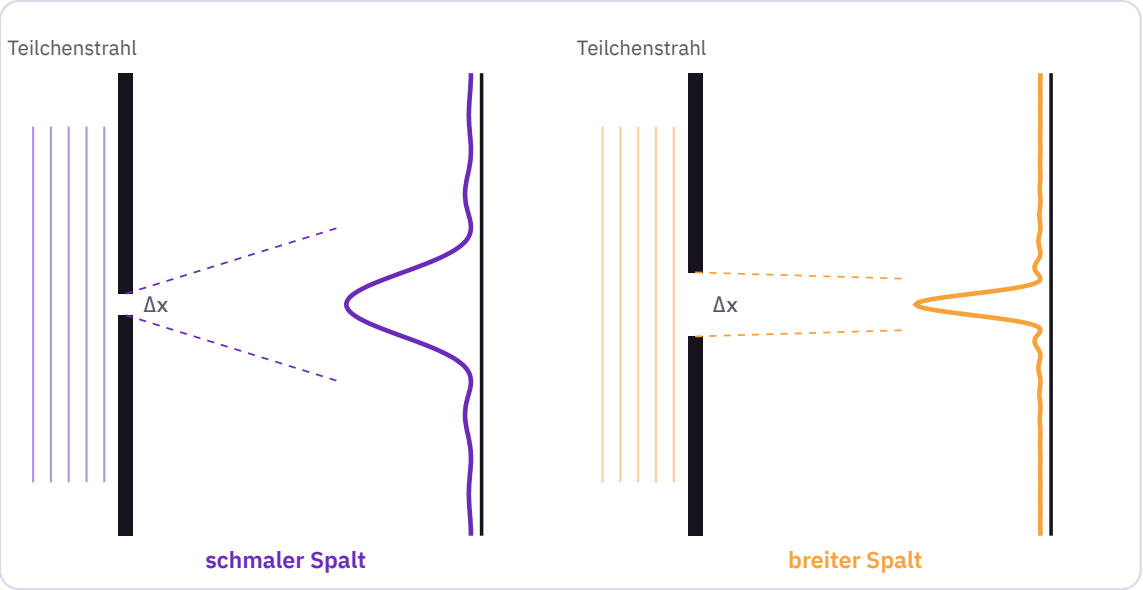

Abb. 2: Beugung am Einzelspalt. Beim schmalen Spalt (links) ist der Ort beim Durchgang genauer festgelegt, dafür ist das Beugungsbild auf dem Schirm breiter als beim dreimal so breiten Spalt (rechts). Eigene Berechnung und Darstellung, nicht maßstäblich.

Genau diesen Versuch hat die Arbeitsgruppe von Anton Zeilinger in Wien 2002 mit Fulleren-Molekülen C_{70} durchgeführt, die zuvor in einem Ofen auf etwa 900 Kelvin erhitzt worden waren. Die Forscher veränderten die Breite des Spalts, maßen jeweils, wie stark sich der Strahl dahinter verbreiterte, und fanden gute Übereinstimmung mit $\Delta x \cdot \Delta p \approx h$ [2]. Schon 1999 hatte dieselbe Gruppe gezeigt, dass C_{60}-Moleküle sich wie Wellen verhalten, obwohl ihre De-Broglie-Wellenlänge mit rund 2,5 Pikometern mehrere Hundert Mal kleiner ist als das Molekül selbst [3].

Von der Faustregel zur Ungleichung

Am Spalt kommt nur eine Größenordnung heraus, weil „etwa α“ und „bis zum ersten Minimum“ keine besonders scharfen Maße für eine Breite sind. Heisenberg selbst hatte es 1927 im Wesentlichen bei solchen Abschätzungen belassen; er rechnete Beispiele durch und gab die Größenordnung an, führte aber keinen allgemeinen Beweis [1]. Den lieferte noch im selben Jahr Earle Kennard, und mit ihm die genaue Schranke, in der Form, wie man sie heute für den Ort x und den Impuls p eines Teilchens in derselben Richtung schreibt [4],[5]:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}, \qquad \hbar = \frac{h}{2\pi} \approx 1{,}055 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J\,s} \tag{2}$$

Δx und Δp sind hier Standardabweichungen, und was damit gemeint ist, versteht man am besten, wenn man sich vorstellt, wie man sie misst. Man bereitet viele Teilchen auf genau die gleiche Weise vor, bestimmt bei einem Teil von ihnen den Ort, bei den übrigen den Impuls, und sieht sich an, wie weit die Ergebnisse jeweils streuen. Je kleiner die eine

Streuung ausfällt, desto größer muss die andere sein. Dass die Spaltabschätzung (1) auf h statt auf $\hbar/2$ kommt, liegt allein daran, dass sie die Breiten anders misst, nämlich über die Spaltbreite und die Lage des ersten Minimums; die Aussage ist dieselbe.

Mit dieser Streuung ist übrigens nicht gemeint, dass jedes einzelne Teilchen auf einer unbekannten, wackelnden Bahn hin und her zittert und man bloß nicht genau genug hinsieht. In der Standarddeutung der Quantenmechanik hat es vor der Messung gar keine scharfe Bahn.

Wie nah kann man der Grenze kommen? Am günstigsten schneidet ein Wellenpaket in Form einer Gaußschen Glockenkurve der Breite σ ab, wie es Abb. 1 zeigt:

$$\psi(x) \propto e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}} \Rightarrow \Delta x = \sigma, \quad \Delta p = \frac{\hbar}{2\sigma} \tag{3}$$

Das Produkt ist dann genau $\hbar/2$, die Ungleichung (2) wird also mit Gleichheit erfüllt, und ein kleineres Produkt ist mit keinem Zustand zu erreichen.

Ort und Impuls sind auch nicht das einzige Paar, das sich so verhält. Howard Robertson übertrug die Aussage 1929 auf beliebige Messgrößen A und B[6]:

$$\sigma_A \cdot \sigma_B \geq \frac{1}{2} \, | \, \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle | \tag{4}$$

In der eckigen Klammer steht der sogenannte Kommutator $\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$. Er gibt an, ob die beiden Operatoren vertauschen, ob es also auf ihre Reihenfolge ankommt oder ob $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$ gilt. Für Ort und Impuls hat er den Wert $i\hbar$, und setzt man das ein, erhält man wieder Gleichung (2). Wo der Kommutator nicht verschwindet, gibt es eine Unschärfe, zum Beispiel auch für den Spin in zwei verschiedenen Richtungen[6]. Ist er dagegen null, vertauschen die Operatoren also, dann gibt es Zustände, in denen beide Größen zugleich scharf sind; das folgt allerdings nicht aus Gleichung (4) selbst, sondern aus einem eigenen Satz der Quantenmechanik.

Heisenbergs Mikroskop, und was davon bleibt

Heisenberg selbst erläuterte seine Beziehung 1927 mit einem Gedankenexperiment[1]. Wer ein Elektron unter einem Mikroskop genau orten will, braucht Licht möglichst kurzer Wellenlänge. Kurzwelliges Licht hat aber einen großen Impuls und stößt das Elektron beim Streuen an, sodass man den Impuls umso stärker stört, je genauer man den Ort bestimmt.

Dieses Bild ist anschaulich und hat sich entsprechend festgesetzt, oft in der Form, die Unschärfe komme eben von ungenauen Messgeräten oder vom unvermeidlichen Anstoßen beim Messen. Es erklärt sie aber nur zum Teil. Gleichung (2) gilt auch ganz ohne störende Messung und auch mit perfekten Geräten, weil sie den Zustand des Teilchens beschreibt

und nicht das Messverfahren. Den Ort für sich allein kann man im Prinzip beliebig genau messen, nur hat das Teilchen danach eben keinen scharf bestimmten Impuls mehr; unmöglich ist ein Zustand, in dem beides zugleich scharf ist.

Ob und in welcher Form auch die Messstörung einer solchen Grenze unterliegt, ist eine eigene Frage, die vor allem seit den 2000er-Jahren intensiv untersucht wurde. Masanao Ozawa schlug 2003 eine neue, allgemein gültige Form vor[7]. Experimente mit Neutronen in Wien und mit Photonen in Toronto zeigten 2012, dass das Produkt aus Messfehler und Störung, so wie Ozawa beide definiert, die naive Heisenberg-Schranke unterschreiten kann, während Ozawas Beziehung erfüllt bleibt[8],[9]. Paul Busch, Pekka Lahti und Reinhard Werner wiederum haben mit anderen, ebenfalls gut begründeten Definitionen für Ort und Impuls bewiesen, dass Heisenbergs Form gültig bleibt[10]. Wie man Fehler und Störung auch definiert, an der Grenze aus Gleichung (2) für den Zustand selbst rüttelt keine dieser Arbeiten.

Warum ein Auto nicht gebeugt wird

Bleibt die Frage vom Anfang, warum man bei einem Auto von alldem nichts bemerkt. Setzt man in Gleichung (2) $p = mv$ ein und löst nach der Geschwindigkeit auf, sieht man, wie stark die Masse m die Unschärfe verkleinert:

$$\Delta v \geq \frac{\hbar}{2m\Delta x} \tag{5}$$

Vom Elektron bis zum Auto

Ein Elektron in einem Atom ist auf etwa $\Delta x \approx 0{,}1$ nm eingesperrt, und damit ergibt sich $\Delta v \geq 580$ km/s. Einen scharf bestimmten Impuls null kann das Elektron im Atom also nicht haben, ihm bleibt eine Mindestenergie, die Nullpunktsenergie. Sie ist der anschauliche Grund dafür, dass es nicht in den Kern stürzt und Atome eine feste Größe haben.

Bei einem Staubkorn von einem Mikrogramm, das auf 1 µm genau lokalisiert ist, schrumpft die Mindestunschärfe schon auf $\Delta v \geq 5 \cdot 10^{-20}$ m/s. Mit dieser Geschwindigkeit käme das Korn in einem ganzen Jahr rund 2 Pikometer weit, also weniger als ein Fünfzigstel eines Atomdurchmessers.

Und das Auto, eine Tonne schwer und mit 30 m/s unterwegs? Seine De-Broglie-Wellenlänge beträgt $2 \cdot 10^{-38}$ m und ist damit mehr als 10^{22}-mal kleiner als ein Atomkern, sodass Beugung an einer Baumreihe ausgeschlossen ist.

Eigene Überschlagsrechnung nach Gleichung (5) und $\lambda = h/p$.

Wo zwischen Fulleren und Auto die Quantenwelt aufhört, ist eine offene Frage, und bisher hat sich keine Grenze gezeigt. 2019 gelang in Wien Interferenz mit Molekülen aus bis zu 2000 Atomen und mehr als 25 000 atomaren Masseneinheiten [11], Anfang 2026 berichtete dieselbe Forschungsgruppe von Interferenz mit Natrium-Nanoteilchen aus mehreren Tausend Atomen und mehr als 170 000 atomaren Masseneinheiten [12]. Roger Penrose vermutet, dass die Schwerkraft bei noch größeren Massen eine Grenze setzt [13], nachgewiesen ist das allerdings nicht. Warum wir im Alltag trotzdem keine Überlagerungen sehen, erklärt der Artikel über Schrödingers Katze.

Quellen

1. W. Heisenberg: *Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik.* In: Zeitschrift für Physik 43 (1927), S. 172–198, doi:10.1007/BF01397280.
2. O. Nairz, M. Arndt, A. Zeilinger: *Experimental verification of the Heisenberg uncertainty principle for fullerene molecules.* In: Physical Review A 65 (2002), 032109, doi:10.1103/PhysRevA.65.032109.
3. M. Arndt, O. Nairz, J. Vos-Andreae, C. Keller, G. van der Zouw, A. Zeilinger: *Wave–particle duality of C_{60} molecules.* In: Nature 401 (1999), S. 680–682, doi:10.1038/44348.
4. E. H. Kennard: *Zur Quantenmechanik einfacher Bewegungstypen.* In: Zeitschrift für Physik 44 (1927), S. 326–352, doi:10.1007/BF01391200.
5. Bureau International des Poids et Mesures (BIPM): *The International System of Units (SI).* 9. Auflage, Sèvres 2019, www.bipm.org/en/publications/si-brochure.
6. H. P. Robertson: *The Uncertainty Principle.* In: Physical Review 34 (1929), S. 163–164, doi:10.1103/PhysRev.34.163.
7. M. Ozawa: *Universally valid reformulation of the Heisenberg uncertainty principle on noise and disturbance in measurement.* In: Physical Review A 67 (2003), 042105, doi:10.1103/PhysRevA.67.042105.
8. J. Erhart, S. Sponar, G. Sulyok, G. Badurek, M. Ozawa, Y. Hasegawa: *Experimental demonstration of a universally valid error–disturbance uncertainty relation in spin measurements.* In: Nature Physics 8 (2012), S. 185–189, doi:10.1038/nphys2194.
9. L. A. Rozema u. a.: *Violation of Heisenberg's Measurement-Disturbance Relationship by Weak Measurements.* In: Physical Review Letters 109 (2012), 100404, doi:10.1103/PhysRevLett.109.100404.
10. P. Busch, P. Lahti, R. F. Werner: *Proof of Heisenberg's Error-Disturbance Relation.* In: Physical Review Letters 111 (2013), 160405, doi:10.1103/PhysRevLett.111.160405.

11. Y. Y. Fein u. a.: *Quantum superposition of molecules beyond 25 kDa.* In: Nature Physics 15 (2019), S. 1242–1245, doi:10.1038/s41567-019-0663-9.
12. S. Pedalino, B. E. Ramírez-Galindo, R. Ferstl, K. Hornberger, M. Arndt, S. Gerlich: *Probing quantum mechanics with nanoparticle matter-wave interferometry.* In: Nature 649 (2026), S. 866–870, doi:10.1038/s41586-025-09917-9.
13. R. Penrose: *On Gravity's Role in Quantum State Reduction.* In: General Relativity and Gravitation 28 (1996), S. 581–600, doi:10.1007/BF02105068.

Zitiervorschlag

quanten.de: *Die Heisenbergsche Unschärferelation.* Stand: Oktober 2026. URL: https://quanten.de/unschaerferelation.html (PDF: https://quanten.de/pdf/unschaerferelation.pdf)

Texte und Abbildungen © 2026 quanten.de. Nutzung mit Quellenangabe und Link gern, kommerzielle Nutzung nach Absprache: info@quanten.de

Weiterlesen: Was sind Quanten? · 100 Jahre Quantenmechanik · Schrödingers Katze

Online-Fassung mit aktualisierten Quellen: https://quanten.de/unschaerferelation.html